Οικογένειες αντικειμένων
(Ειδικότερα οικογένειες συνόλων)

Αν I είναι ένα σύνολο δεικτών κ' $\forall i$ έχουμε ένα σύνολο A_i λέμε ότι έχουμε μία οικογένεια συνόλων (...)

(...)

$A_i (i\in I)$

Αν I ένα σύνολο (σύνολο δεικτών) κ' $a: I \to E$ μία συνάρτηση στο σύνολο τιμών της a πολλές φορές το λέμε οικογένεια στο E. Συνήθως αντί για $a(i)$ συμβολίζουμε με a_i. Έτσι αναφερόμαστε στην οικογένεια (a_i) ή $\{a_i : i\in I\}$

Ορισμός: Έστω $(A_i)_{i\in I}$ μία οικογένεια συνόλων

(i) Συμβολίζουμε με $\bigcup_{i\in I} A_i$ κ' καλούμε ένωση της οικογένειας συνόλων $(A_i)_{i\in I}$ το σύνολο που περιέχει ακριβώς όλα τα στοιχεία των συνόλων A_i, $\forall i\in I$, δηλαδή $\bigcup_{i\in I} A_i = \{x : \exists i\in I \ x\in A_i\}$

(ii) Συμβολίζουμε με $\bigcap_{i\in I} A$ κ' καλούμε τομή της οικογένειας $(A_i)_{i\in I}$ το σύνολο που περιέχει τα κοινά στοιχεία των συνόλων $A_i, i\in I$ δηλαδή $\bigcap_{i\in I} A_i = \{x : \forall i\in I \ x\in A_i\}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν $\mathcal{C}$ είναι μία συλλογή συνόλων αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως οικογένεια συνόλων με σύνολο δεικτών το ίδιο το $\mathcal{C}$, δηλαδή $(A)_{A\in \mathcal{C}}$ ή $\{A : A\in \mathcal{C}\}$

$\cup\mathcal{E} = \bigcup\limits_{A\in\mathcal{E}} A \qquad \cap\mathcal{E} = \bigcap\limits_{A\in\mathcal{E}} A.$

ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΑ ΓΙΝΟΜΕΝΑ

Για δύο σύνολα A, B το $A\times B$ (καρτεσιανό γινόμενο των A, B) περιέχει ακριβώς τα διατεταγμένα ζεύγη (x, y) $x\in A$, $y\in B$.

Ο ορισμός αυτός επεκτείνεται για πεπερασμένο αριθμό συνόλων κ' έτσι $A_1, \dots, A_n$ (n το πλήθος σύνολα)

Το σύνολο $A_1\times A_2\times \dots \times A_n$ είναι το σύνολο των διατεταγμένων n-άδων $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ με $a_i\in A_i$ $i=1,\dots,n$ παρατηρούμε ότι αν θέσουμε το σύνολο δεικτών $I=\{1,2,\dots,n\}$ κάθε στοιχείο του συνόλου $A_1\times A_2\times\dots\times A_n$, δηλ. κάθε διατεταγμένη n-άδα $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ (με $a_i\in A_i$ $i=1,\dots,n$)

Μπορεί να θεωρηθεί συνάρτηση $f: I \to \boxed{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} = A_1\cup\dots\cup A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$

$f(i)$

ώστε $\forall i\in I$ απεικονίζεται στο $a_i\in A_i$

Έτσι το καρτεσιανό γινόμενο $A_1\times A_2\times\dots\times A_n$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f: I \to \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ ώστε $f(i)\in A_i$ $\forall i\in I$, $I = \{1,2,\dots,n\}$

Αυτό μας οδηγεί στην παρακάτω γενίκευση.

Το καρτεσιανό γινόμενο μιας οικογένειας συνόλων $(A_i)_{i\in I}$ (συμβολίζεται $\prod\limits_{i\in I} A_i$) (χρησιμοποιείται κ' συμβολίζεται $\times_{i\in I} A_i$) είναι το σύνολο

$$\prod_{i\in I} A_i = \{f: I \to \bigcup_{i\in I} A \quad f(i)\in A_i \quad \forall i\in I\}$$

Αν $a\in\prod\limits_{i\in I} A_i$ κ' $j\in I$ η j-συντεταγμένη του a είναι η τιμή $a(j)$ που συμβολίζεται με a_j

Για να αναφέρουμε (αναφερόμαστε σε) ένα στοιχείο α του $\prod_{i\in I} A_i$
χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $(a_i)_{i\in I}$ όπου η δείκτη
$i\in I$ a_i είναι η i συνιστώσα του α.
$\forall\, i_0\in I$ η συνάρτηση $\pi_i : \prod_{i\in I} A_i \to A_{i_0}$ με τύπο $\pi_{i_0}((a_i)_{i\in I}) = a_{i_0}$

λέγεται προβολή στην i_0 συντεταγμένη (i_0 προβολή)

(1) Αξίωμα της Επιλογής

Αν $I\neq\emptyset$ κ' $(A_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια μη κενών συνόλων, τότε $\exists$ συνάρτηση
$\phi : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ ώστε $\phi(i)\in A_i$ $\forall i\in I$

(2) Ισοδύναμες μορφές

Αν $I\neq\emptyset$ ένα σύνολο κ' $A_i\neq\emptyset$ $\forall i\in I$, τότε το καρτεσιανό γινόμενο
$\prod_{i\in I} A_i$ είναι μη κενό.

Υπάρχουν πολλές ισοδύναμες μορφές του αξιώματος επιλογής (για κάποιες
η απόδειξη ότι είναι ισοδύναμες είναι εύκολη για κάποιες άλλες αρκετά
δύσκολη)

(3) Λήμμα του Zorn

Αν $(E, \leq)$ είναι ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο ώστε αλυσίδα (γραμμικά
διατεταγμένο υποσύνολο) του E να έχει άνω φράγμα στο E, τότε το E έχει maximal
στοιχεία.

(4) $\forall$ σύνολο A $\exists$ καλή διάταξη $\leq$ στο A

(5) Για οποιαδήποτε σύνολα A, B $\exists$ $f: A\to B$ 1-1 ή $\exists$ $g: B\to A$ 1-1

•Ασκήσεις

1) $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$f(x) = 5x - 17$

f 1-1, επί τύπος f^{-1}

$\boxed{f \text{ 1-1}}$

Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $f(x)=f(y)$

$\Rightarrow 5x-17=5y-17$

$\Rightarrow 5x=5y$

$\Rightarrow x=y$

Άρα η f 1-1.

$\boxed{f \text{ επί}}$ Έστω $y \in \mathbb{R}$

Αναζητούμε $x \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x)=y$

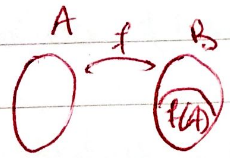
$5x-17=y \Leftrightarrow 5x=y+17 \Leftrightarrow x=\frac{1}{5}y+\frac{17}{5}$

f επί.

Ο τύπος της αντίστροφης της f είναι $f^{-1}(y)=\frac{1}{5}y+\frac{17}{5}$

ή $f^{-1}(x)=\frac{1}{5}x+\frac{17}{5}$

Σημείωση: Αν $f: A \to B$ το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $R(f)=f(A)$



Αν μια συνάρτηση $f: A \to B$ είναι 1-1, αλλά δεν είναι επί, αντικαθιστώντας το B από το $f(A)$ η συνάρτηση $f: A \to f(A)$ γίνεται 1-1 κ' επί. κ' άρα μπορούμε να θεωρήσουμε την αντίστροφή της $f^{-1}: f(A) \to A$

π.χ. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x)=e^x$ η f είναι 1-1 αλλά όχι επί. αφού $f(\mathbb{R})=(0,+\infty)$
Έτσι, αντικαθιστώντας το $\mathbb{R}$ με το $(0,+\infty)$ κ' ορίζεται η αντίστροφή της που είναι η λογαριθμική συνάρτηση

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x)=x^2$

$A=(-1,2]$

$f(A),\ f^{-1}(A),\ f(f^{-1}(A)),\ f^{-1}(f(A))$

$A=(-1,0]\cup[0,2]$

$f(A) = f((-1,0]) \cup f([0,2]) = [f(0), f(-1)) \cup [f(0), f(2)] =$
$= [0,1) \cup [0,4] = [0,4]$

Η f είναι γν φθίνουσα κ' 6ls στο $[-1,0]$
γν αύξουσα κ' 6ls στο $[0,2]$

$f^{-1}(A) = ;$

$x \in f^{-1}(A) \Leftrightarrow f(x) \in A$
$\Leftrightarrow x^2 \in [-1,2]$
$\Leftrightarrow -1 \leq x^2 \leq 2$
$\Leftrightarrow x^2 \leq 2$
$\Leftrightarrow (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) \leq 0$
$\Leftrightarrow x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

Άρα $f^{-1}(A) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

$f(f^{-1}(A)) = f([-\sqrt{2}, \sqrt{2}])$
$= f([-\sqrt{2}, 0]) \cup f([0, \sqrt{2}])$
$= [0,2] \cup [0,2]$

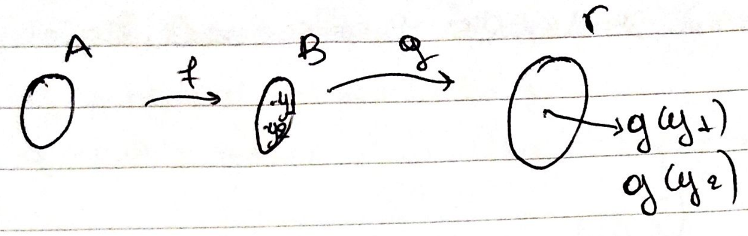
f 6ls↓ στο $[-\sqrt{2},0] = [0,2]$
f 6ls κ' ↗ στο $[0, \sqrt{2}]$

$f^{-1}(f(A)) = f^{-1}([0,4]) = [-2,2]$

Με την ίδια διαδικασία
που κάναμε πριν

4) $f: A \to B$ $g: B \to \Gamma$ 2 συναρτήσεις
(i) Αν f επί κ' η $g \circ f$ είναι 1-1
νδο g είναι 1-1
(ii) Νδο (χρησ. κατ. αντιπαράδειγμα) ότι δεν μπορεί να παραλειφθεί
η υπόθεση ότι f είναι επί στο (i)

Λύση: Έστω $y_1, y_2 \in B$ ώστε $g(y_1)=g(y_2)$



Εφόσον η $f: A \to B$ είναι επί $\exists\, x_1 \in A$ κ' $x_2 \in A$ ώστε $f(x_1)=y_1$ κ' $f(x_2)=y_2$

Άρα $\left.\begin{aligned} g(f(x_1)) &= g(y_1) \\ g(f(x_2)) &= g(y_2) \end{aligned}\right\} \underline{g(y_1)=g(y_2)} \Rightarrow$

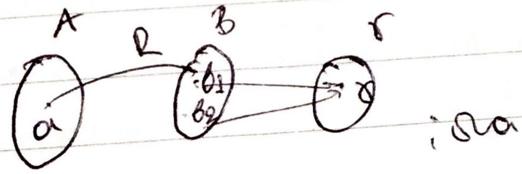
$g(f(x_1))=g(f(x_2))$

$\to (g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)$ κ' αφού η $g\circ f$ είναι 1-1 προκύπτει $x_1=x_2$

κ' άρα $f(x_1)=f(x_2) \xRightarrow{\text{συνεπώς}} y_1=y_2$

Επομένως, η g είναι 1-1

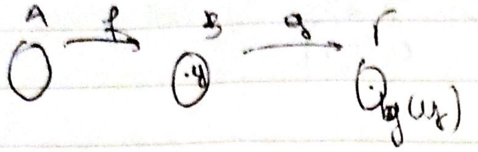
(ii) Αναζητούμε ένα πχ ώστε $g\circ f$ να είναι 1-1 αλλά g όχι 1-1
Σε αυτό το πχ (λόγω του α) η f δεν πρέπει να είναι επί



Εδώ η $g\circ f$ είναι 1-1 αλλά η g όχι.

5) $f: A \to B$, $g: B \to \Gamma$ δύο συναρτήσεις
(i) Αν g 1-1 κ' $g\circ f$ επί, τότε f επί
(ii) Η υπόθεση "g 1-1" δεν μπορεί να παραλειφθεί στο (i)

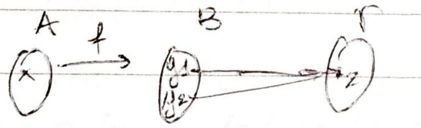
(i)



Έστω $y \in B$ (κ' αναζητούμε $x \in A$ ώστε $g(x) = y$)

Τότε $g(y) \in \Gamma$. Άρα από την υπόθεση ότι η $g\circ f: A \to \Gamma$ είναι επί:
$\exists x \in A$ ώστε $(g\circ f)(x) = g(y)$
δηλαδή $g(f(x)) = g(y)$
Επειδή η συνάρτηση g είναι 1-1 προκύπτει ότι $f(x) = y$
Επομένως η f είναι επί.

(ii) Αναζητούμε κατάλληλα A, B, Γ
$f: A \to B$, $g: B \to \Gamma$
ώστε $g\circ f$ επί κ' f όχι επί



$A = \{x\}$
$B = \{y_1, y_2\}$
$\Gamma = \{z\}$

$f(x) = y_1$ $g(y_1) = z$,
τότε $g\circ f$ είναι επί, ενώ η f δεν είναι επί (καθώς $\nexists x_0 \in A$ ώστε $f(x_0) = y_2$)

3) $f: A \to B$, $g: A \to B$ δύο συναρτήσεις. Νδο αν $f \subseteq g$ τότε $f = g$

Λύση: Υποθέτουμε ότι $f \subseteq g$
Για νδο $f = g$ αρκεί νδο $\boxed{g \subseteq f}$

$f \subseteq A \times A$
(i) $\forall x \in A\ \exists y \in B\ (x,y) \in f$
(ii) $\forall x \in A\ \forall y_1, y_2 \in B$
αν $(x, y_1) \in f$ κ'
$(x, y_2) \in f$, τότε $y_1 = y_2$

Έστω $(x,y)\in g$, τότε $x\in A$ $y\in B$

Εφόσον $x\in A$ κ' η f είναι συνάρτηση $\exists b\in B$ ώστε $(x,b)\in f$
Εφόσον $f\subseteq g$ συμπεραίνουμε ότι $(x,b)\in g$
Εφόσον η g είναι συνάρτηση κ' $(x,y)\in g$ κ' $(x,b)\in g$ προκύπτει ότι $\boxed{y=b}$

Έτσι, αφού $(x,b)\in f$ κ' $y=b$ προκύπτει ότι $(x,y)\in f$
Έτσι, αποδείχθηκε ότι $g\subseteq f$
Εφόσον $f\subseteq g$ κ' $g\subseteq f$, έχουμε $f=g$

6) Αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δύο ↘ ακολουθίες συνόλων
(δηλαδή $A_n\supseteq A_{n+1}$, $B_n\supseteq B_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$)
νδο $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A_n\cup B_n)=(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n)\cup(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}B_n)$

Λύση Αρκεί νδο
(i) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A_n\cup B_n)\subseteq(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n)\cup(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}B_n)$

(ii) $(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n)\cup(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}B_n)\subseteq\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A_n\cup B_n)$

Αποδεικνύουμε το (ii)
Έστω $x\in(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n)\cup(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}B_n)$, τότε $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n$ ή $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}B$

1η περίπτωση $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n$, τότε $x\in A_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$, άρα (αφού $A_n\subseteq A_n\cup B_n$)

$x\in A_n\cup B_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$, άρα $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A_n\cup B_n)$)

2η περίπτωση: $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}B_n$, τότε $x\in B_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ άρα (αφού $B_n\subseteq A_n\cup B_n$)

$x\in A_n\cup B_n$ $\forall n$, άρα $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A_n\cup B_n)$

Δείχνουμε τώρα το (ii) ώστε $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cup B_n)$

Θέλουμε νδο: $x \in \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cup \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)$

Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι $x \notin \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cup \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)$.

τότε $x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ κ' $x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$, τότε $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $x \notin A_{n_1}$

κ' $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $x \notin B_{n_2}$

Εφόσον $A_n \supseteq A_{n+1}$ $\forall n$ συμπεραίνουμε ότι $x \notin A_n$ $\forall n \geq n_1$
Εφόσον $B_n \supseteq B_{n+1}$ $\forall n$ προκύπτει ότι $x \notin B_n$ $\forall n \geq n_2$
Θέτουμε $m = \max\{n_1, n_2\}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{τότε } m \geq n_1, \text{ άρα } x \notin A_m \\ \text{κ' } m \geq n_2, \text{ άρα } x \notin B_m \end{array}\right\} \Rightarrow x \notin A_m \cup B_m.$$

Άτοπο, διότι $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cup B_n)$. Επομένως $x \in \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cup \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)$